



**Mercedes Anido de López**  
**Patricia Alejandra Có**  
**Mónica del Sastre**  
**Erica Panella**  
*Escuela de Estadística*

## **UNA CATEGORIZACIÓN DE SITUACIONES DE APRENDIZAJE SEGÚN BROUSSEAU**

### **1. INTRODUCCIÓN**

¿Por qué surge en la Facultad de Ciencias Económicas la idea de cursos con estrategias innovadoras?. La enseñanza de la Matemática a alumnos que no sean de una Licenciatura en Matemática plantea un desafío que frecuentemente ha sido ignorado. Los contenidos se han desarrollado como si los alumnos fueran potenciales especialistas en Matemática. En general, la Matemática se presenta en forma aséptica, sin contaminación con los problemas reales. Existe una falta de motivación en la introducción de los temas.

Pensamos que, para un alumno que vocacionalmente ha elegido una carrera del área de las Ciencias Económicas, podría ser atractivo que el aprendizaje se centrara en temas que se utilicen en la modelización de problemas de su campo de interés. Por ejemplo, la modelización geométrica es una herramienta importante en todas las aplicaciones de las ciencias, especialmente en la percepción global de un problema.

Ello además incentivaría al alumno al estudio y a la formación de conceptos sólidos. Se transitaría así de un aprendizaje a veces memorístico a un aprendizaje significativo. Se deberían buscar metodologías alternativas que además favorezcan el uso del pensamiento lógico riguroso y que, al mismo tiempo, aprovechen la riqueza de algunos modelos matemáticos de la Economía, ya accesibles en el inicio de la Matemática Básica del nivel universitario, por ejemplo la Programación Lineal.

Una de las dificultades que se presentaban tanto para la actualización de los docentes como para un mejor y más moderno aprendizaje de los alumnos en el área matemática ha sido la carencia de un ámbito computacional adecuado. Se requería un espacio físico con las herramientas informáticas indispensables para el ejercicio de la docencia e investigación en una universidad moderna. Se necesitaba también formar a los docentes en el manejo de los sistemas operativos y software específicos, especialmente a los que no tenían entrenamiento en el manejo de PC. Todo esto se ha solucionado en el marco del Proyecto FOMEC N° 615 (Anido, 1998) con cuyos recursos se ha adquirido el equipamiento informático que permite realizar los trabajos de campo cuyos datos fundamentan la investigación que se informa.

La aparición de las llamadas herramientas CAS (Computer Algebraic System), que actúan como poderosas calculadoras numéricas o simbólicas y potentes graficadoras, y que no requieren conocimientos de programación, podrían ser fuertemente motivadoras de un cambio curricular y actualización del cuerpo docente, por el interés que despierta su versatilidad para el trabajo matemático.



El mayor logro del proyecto aún en curso, estriba en el interés demostrado por los docentes en sus cursos de formación, en la amplitud de la temática que una vez concluido el Proyecto abarcará todos los contenidos de la Matemática Básica que se requieren en el grado y postgrado de una Facultad de Ciencias Económicas y en los trabajos de producción, desarrollo e investigación debidamente documentados que han surgido como fruto de estos cursos.

En este trabajo se describe una investigación que se ha realizado con los elementos de análisis de la Ingeniería Didáctica (Anido y otros, 2000), en cursos de la Carrera de Estadística y con alumnos de la Facultad de Ingeniería utilizando ambos cursos el mismo Laboratorio de computación.

Se busca mostrar, en el diseño anticipativo de una "unidad de enseñanza" (Wittmann, 1995) relativo a un tema importante del curriculum de la Matemática Básica de las carreras universitarias, la interrelación entre los campos conceptuales que subyacen y el rol que se puede hacer jugar a una herramienta computacional en el aprendizaje. Siguiendo los lineamientos de Douady (1995) se presentan ejemplos de propuestas de enseñanza que corresponden a selecciones didácticas analizadas, argumentadas y justificadas en la triangulación que surge de la "observación participante" del trabajo áulico (consignado en registros magnetofónicos), de los resultados del aprendizaje y de la valoración que los propios alumnos expresaron en los resultados de un cuestionario (Có, 1999).

El análisis previo realizado que fundamenta nuestro diseño se basa en la posición sobre el "espacio intuitivo" y el desarrollo de "la intuición espacial" expresados en trabajos de Enriques (1948) y Villani (1995) respectivamente, que se refuerza en este punto con algunos aportes de otros autores sobre la validez matemática del conocimiento geométrico obtenido por visualización y la importancia de las operaciones de relación y clasificación provocadas por dicha visualización.

Las corrientes formalistas de las décadas pasadas han llevado a muchos profesores y expositores de la Matemática a considerar como prioritaria la exposición «formal» de la Matemática y como andaderas inútiles, cuando no perjudiciales, los apoyos en la intuición visual de los conceptos y procesos del pensamiento matemático.

En la propuesta que presentamos, el alumno frente a la pantalla construye un conocimiento con un fuerte apoyo visual ¿es un recurso lícito? ¿es conveniente utilizarlo en un nivel universitario?

Como respuesta al cuestionamiento del valor del conocimiento matemático adquirido por visualización, Miguel de Guzmán (1996) opina que sería posible en principio establecer una especie de tabla de correspondencias entre ciertos aspectos de la representación visual y los significados matemáticos que representan, hasta tal punto que las posibles manipulaciones con los objetos de nuestra representación visual permitirían una traducción, en el momento en que nos lo propongamos, con mayor o menor esfuerzo, en las relaciones matemáticas abstractas que representan. La utilidad de este correlato "exacto" es bien clara, ya que la manipulación de objetos percibidos por nuestros sentidos o por nuestra imaginación se nos hace normalmente mucho más fácil que el tratamiento de conceptos abstractos frecuentemente bien complicados.

El pensamiento visual, explotado convenientemente, puede revolucionar la forma de hacer Geometría y de enseñarla. Desarrollando el pensamiento visual, no sólo se abren nuevos horizontes en la forma de enseñar Geometría y en las temáticas curriculares, sino que se facilitan nuevas maneras de descubrir e investigar. En este sentido, la exploración espacial mediante el uso de ordenadores es un claro ejemplo de cómo se ha revolucionado la aproximación docente a las estructuras tridimensionales y cómo se han abierto nuevas fronteras investigadoras (Alsina, Fortuni, Pérez Gómez, 1997).

Dentro de la investigación en Geometría es necesario destacar como especialidad autónoma la dedicada a la «visualización espacial», ya que está fuera de duda que la capacidad de visión espacial es una componente necesaria para el aprendizaje de la geometría tridimensional. No obstante, la «visualización» es una habilidad que no sólo interacciona con la Geometría, sino con la Aritmética, el Álgebra, etc. La investigación en este campo presenta bastantes problemas derivados en parte de la dificultad de acotar el concepto de «visualización espacial» (Bishop, 1983).

De la propuesta de unidades de enseñanza con herramienta computacional que implementamos se seleccionaron situaciones de pantalla (ver anexo) que pretenden transmitir precisamente las intuiciones visuales que apoyan, y en muchos casos han dado origen a los conceptos y procesos matemáticos más básicos e importantes.

## 2. METODOLOGIA DE LA INVESTIGACIÓN

En algunas ocasiones el choque de las diferentes aproximaciones metodológicas ha dado lugar a lo que se conoce como "el debate cualitativo-cuantitativo". Los investigadores podrían decidir adoptar métodos en los cuales la información obtenida no puede ser convertida en números. Es muy importante, a la hora de elegir, tener clara la distinción entre la aproximación analítica, en la cual los eventos externos al sujeto son manipulados (aislados, controlados y medidos) con el propósito de inferir acerca de eventos internos como el aprendizaje o la toma de decisiones y la aproximación sistémica, en la cual los eventos son estudiados en su mutua interacción e interpretación.

Los métodos cualitativos se utilizan preferentemente en aquellos estudios centrados en el análisis de la formación de conceptos y que, en general, tratan de indagar sobre cómo se desarrolla un proceso cognitivo, o de entender el proceso completo y la influencia de los diferentes elementos que intervienen en él. Este método de investigación permite descripciones mucho más ricas de las situaciones de aprendizaje que los métodos cuantitativos.

Precisamente un aspecto notable asociado con la investigación en Educación Matemática es el uso cada vez más natural de los métodos cualitativos. Esto ha contribuido a que se de más atención al desarrollo individual del estudiante y del docente y menos énfasis a la comparación de grupos o escuelas (Santos Trigo, 1996).

Dentro de la comunidad de investigadores que, desde diversas disciplinas, se interesan por los problemas relacionados con la Didáctica de la Matemática, se han ido destacando en los últimos años, principalmente en Francia: Brousseau, Chevallard, Vergnaud; un grupo que se esfuerza en una reflexión teórica sobre el objeto y los métodos de investigación específicos en Didáctica de la Matemática. Fruto de este esfuerzo, ha surgido una concepción llamada por sus autores "fundamental" de la Didáctica que presenta caracteres diferenciales respecto a otros enfoques. Es una concepción global de la enseñanza estrechamente ligada a la Matemática y a teorías específicas de aprendizaje, fruto de la búsqueda de paradigmas propios de investigación, desde una postura integradora entre los métodos cuantitativos y cualitativos. En esta corriente surge la Ingeniería Didáctica.

La elaboración de un problema es un paso de una Ingeniería Didáctica. En este contexto, el término Ingeniería Didáctica designa un conjunto de secuencias de clase concebidas, organizadas y articuladas en el tiempo de manera coherente por un *profesor-ingeniero*, con el fin de realizar un proyecto de aprendizaje para una población determinada de alumnos. En el transcurso de las interacciones entre el profesor y los estudiantes, el proyecto evoluciona bajo las reacciones de los estudiantes y en función de las selecciones y decisiones del profesor. De esta forma, la Ingeniería Didáctica es a la vez un **producto**,



resultante de una análisis a priori, y un **proceso** en el transcurso del cual el profesor ejecuta el producto adaptándolo, si se presenta el caso, a la dinámica de la clase.

La metodología de investigación de la Ingeniería Didáctica se caracteriza también, en comparación con otros tipos de investigación basados en la experimentación en clase, por el registro en el cual se ubica y por las formas de validación a las que está asociada. De hecho, las investigaciones que recurren a la experimentación en clase se sitúan por lo general dentro de un enfoque comparativo con validación externa basada en la comparación estadística del rendimiento de grupos experimentales y grupos de control. Este no es el caso de la Ingeniería Didáctica que se ubica, por el contrario, en el registro de los estudios de caso y cuya validación es en esencia interna, basada en la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori.

En este contexto, se puede considerar, en primer lugar, la cuestión de las técnicas de observación empleadas en la investigación, donde las ideas de Vergnaud (1980) expuestas en el Segundo Seminario de Investigación Psicopedagógica realizado en Barcelona que reunió a matemáticos y psicólogos, reflejan magistralmente nuestro pensamiento: "Planteémonos la cuestión de la forma siguiente: admitamos que la investigación en didáctica persigue, entre otras cosas, establecer hechos didácticos. Se trata de hechos que intervienen en la clase, a lo largo del proceso de transmisión, de apropiación y de construcción de los conocimientos. Estos hechos conciernen a las conductas de los alumnos frente a las situaciones que se les proponen y las conductas del maestro frente a las conductas de los alumnos y frente al saber que pretende transmitir".

A continuación Vergnaud señala la importancia de "construir experiencias didácticas" con medios de observación fiables entre los que destaca la información por muchos observadores y remarca dos finalidades distintas:

La primera finalidad concierne al proyecto didáctico que es formulado la mayoría de las veces en términos de mejora de los conocimientos prácticos y teóricos de los alumnos, incluso en las actividades libres.

La segunda finalidad concierne a la observación, es decir el proyecto científico de registro de hechos didácticos con intención de analizarlos, de interpretarlos y de construir de esa manera un cuerpo de conocimientos consistente y fiable: una didáctica.

Según Vergnaud (1976, 1981): "Se trata de rendir cuentas de los recorridos, los procedimientos que desembocan en la resolución de problemas o de fracaso".

Lincoln y Guba (1985) indican que los criterios convencionales utilizados para convencer a la audiencia (incluyendo uno mismo) del valor de los estudios cuantitativos, difieren de los criterios usados en los estudios de carácter cualitativo. La palabra en inglés "trustworthiness" resume el criterio de confianza en un estudio cualitativo. En la discusión de este criterio intervienen aspectos como credibilidad, transferencia, dependencia y confirmación del estudio. Estos aspectos pueden considerarse similares a los usados por el paradigma cuantitativo, es decir, validez interna, validez externa, confiabilidad y objetividad.

Respecto al control de la fiabilidad de los resultados, Guba y Lincoln (1982) trazan una serie de correspondencias entre los límites atribuidos a los cuatro aspectos de la fiabilidad, de acuerdo con los estudios racionalista y naturalista: credibilidad, transferibilidad, dependencia y confirmación.

Credibilidad: la realidad de la situación es tal que múltiples factores trabados unos con los otros, forman un todo que no puede comprenderse si se lo fragmenta. Para el control de este aspecto de la fiabilidad se propone:



Compromiso prolongado con una situación, para remediar las distorsiones provocadas por la presencia de investigadores y para dar a éstos la posibilidad de analizar las percepciones y de evitar las posibles desviaciones que introducen.

Observación persistente, con el fin de descubrir y distinguir las características dominantes de las que son atípicas. Algunas características atípicas están fuera de contexto, pero otras son significativas de algún aspecto crítico.

Análisis crítico realizado por parejas de investigadores no implicados en la situación. A ellos deben someterse la hipótesis de trabajo y las preguntas que se plantean.

Triangulación, con el fin de entrecruzar datos e interpretación, se oponen unos a otros, las diferentes fuentes de datos, los distintos investigadores, las distintas perspectivas teóricas y los diferentes métodos empleados (Denzin, 1978). Por ejemplo, ningún ítem de información es aceptado sin ser verificado previamente al menos por dos fuentes. Siempre que sea posible, el equipo de investigación se escinde en dos para comparar sus percepciones de los hechos. Los datos son sometidos a distintas teorías para conseguir hipótesis diferentes a contrastar. Se utilizan diferentes técnicas para ver si concuerdan constataciones independientes en el planteamiento de los mismos hechos (cuestionarios, entrevistas, grabaciones, análisis, documental, etc.).

Verificación ante los compañeros de la situación, de los datos recogidos y de la interpretación correcta de los hechos. Tras el estudio se puede verificar la coherencia estructural, viendo si existen contradicciones internas y si es posible darle una interpretación. Se someten las conclusiones a expertos que puedan consultar los materiales de observación y contar con las reacciones de los participantes.

Transferibilidad: la observación naturalista arranca del principio de que las descripciones e interpretaciones son relativas a su contexto dado. El muestreo estudiado no supone que sea representativo de un conjunto, sino que solamente es susceptible de comunicar el máximo posible de informaciones adecuadas a propósito del tema que se pretende estudiar. La descripción intensa de los datos, en el sentido en que la entiende Geertz (1973), debe permitir la comparación del contexto estudiado con otro.

Dependencia: debe analizar las formas de inestabilidad aparente por medio de:

La técnica de recubrimiento, que es una forma de proceso de triangulación en el que los métodos son utilizados en asociación de forma que se compensa la endeblez de uno con la ventaja del otro y se asegure su complementariedad.

La duplicidad de caminos por la que el equipo de investigación se escinde en dos para estudiar por separado los datos divididos también en dos conjuntos, ambos equipos se comunican los resultados a lo largo del trabajo para entrecruzar sus fundamentos, sus hipótesis de trabajo y tomar decisiones sobre las etapas siguientes.

Durante el estudio, un auditor externo debe establecer un proceso de verificación tras examinar el proceso de recogida, de formulación y de análisis de los datos.

Confirmación: es preciso establecer la técnica de triangulación, pero también hay que contar con la posibilidad de un retorno reflexivo sobre la trayectoria de investigación, con el fin de que investigador revele los fundamentos epistemológicos subyacentes que le llevar a formular sus preguntas y presentar de una determinada manera sus resultados (Ruby, 1980). Un auditor externo examina las relaciones establecidas entre los datos recogidos y las interpretaciones hechas, y puede solicitar una documentación mas amplia (De Ketele, 1992).

Las etapas de investigación seguidas en este trabajo responden al modelo de observación propuesto por López Barajas (1998) y presenta los siguientes pasos:



- Selección y definición de problemas. Fenómeno objeto de estudio.
- Identificación y selección de unidades de observación.
- Instrumentos de recolección de datos.
- Registro, codificación y formas de representación de datos.
- Procedimientos de análisis.
- Interpretación de los resultados.
- Validación y triangulación.

Finalmente, en el marco del proyecto, para la elaboración de conclusiones se convergerá a distintas triangulaciones implícitas siguiendo a Denzin, mencionado también por López Barajas (1998):

- Triangulación de datos que incluyen el tiempo y los lugares donde se efectuaron las experiencias.
- Triangulación de investigadores.
- Triangulación de teorías respecto a distintos enfoques epistemológicos de la enseñanza de la Matemática como disciplina que define su propia metodología.
- Triangulación de métodos.

No obstante, respecto a éste último punto pesaría más en la elaboración de conclusiones el enfoque cualitativo, en el sentido de "un predominio en el tiempo y en el número, de investigaciones con metodología observacional y descriptiva sobre las cuantitativas".

La observación designa esa fase de la investigación consistente en familiarizarse con una situación o fenómeno determinado, en describirlo, en analizarlo con el fin de establecer una hipótesis coherente con el cuerpo de conocimientos anteriores ya establecido.

La observación simple es la inspección y estudio realizado por el investigador, mediante el empleo de sus propios sentidos, especialmente de la vista, con o sin ayuda de aparatos técnicos, de las cosas y hechos de interés científico, tal como son o tienen lugar espontáneamente, en el tiempo en que acaecen y con arreglo a las exigencias de la investigación científica.

El observador es participante si se integra al grupo que observa y a la vida de éste.

### **3. ANÁLISIS DE LAS HIPÓTESIS PREVIAS DE LOS ESTUDIANTES Y DE LOS OBSTÁCULOS QUE DETERMINAN SU EVOLUCIÓN**

Se observan deficiencias generalizadas, en los alumnos de primer año de la universidad, en el manejo algebraico, en la comprensión del concepto de ecuación, en la aplicación de las propiedades de los polinomios y en el manejo de los sistemas de coordenadas.

Se observan dificultades en la construcción de un lugar geométrico dado por una propiedad y, recíprocamente, en la traducción al lenguaje del Álgebra de una propiedad geométrica dada, aún en casos simples. Por ejemplo: ¿qué representa  $x=2$ ?



- a) en un eje;
- b) fijado un sistema de coordenadas en el plano;
- c) fijado un sistema de coordenadas en el espacio.

En este punto existen obstáculos epistemológicos en el paso de una representación a otra.

Aún al finalizar los temas de recta en el plano y en el espacio y de plano en el espacio se presentan dificultades de ese tipo. Por ejemplo:

- ♦ obtención de un punto que pertenece a una recta dada en el plano por su ecuación.
- ♦ obtención de los puntos de intersección con los ejes coordenados.
- ♦ representación de rectas dadas por propiedades que se pueden traducir algebraicamente.
- ♦ partición del espacio en octantes.
- ♦ obtención de un punto que pertenezca a un plano dado por su ecuación.
- ♦ obtención de intersecciones de un plano con los ejes coordenados o de una recta en el espacio con los planos coordenados, etc.
- ♦ dificultad en pensar que las infinitas soluciones de una ecuación de primer grado en dos variables no son coordenadas de puntos cualesquiera sino que están precisamente sobre una recta y, análogamente, que las infinitas soluciones de una ecuación de primer grado en tres variables son coordenadas de puntos que se ubican en un plano. O sea infinitas soluciones no quiere decir cualquier punto del plano.

#### 4. EL PROBLEMA DIDÁCTICO

En el primer año de las distintas carreras de la universidad en las que se estudia la disciplina Matemática, la comprensión de la relación bidireccional que existe entre una ecuación dada en el espacio de dos o tres dimensiones y los conjuntos de puntos que la representan ha sido siempre un tema considerado difícil. El tema de este trabajo es relativo a la representación geométrica de relaciones dadas por una ecuación en dos variables en el plano y de una ecuación en tres variables en el espacio.

El problema didáctico que nos ocupa se podría sintetizar en el siguiente interrogante:

¿Es posible elaborar una propuesta relativa a la enseñanza de la Geometría en el nivel universitario que permita seleccionar situaciones didácticas concretas en las que se utilice una herramienta CAS (Computer Algebraic System) como herramienta cognitiva, en forma tal que la interacción de los alumnos con el computador facilite el paso de las abstracciones sucesivas que llevan a la integración de los cuadros algebraico y geométrico que requieren las institucionalizaciones de la Geometría Analítica en el primer año de la universidad y donde se puedan observar, registrar y reproducir procedimientos que favorecen la aparición de esas situaciones?. ¿Qué comportamiento tienen las variables, en este contexto de exploración del conocimiento, motivación, valoración del alumno?

Siguiendo el lenguaje de Douady vamos a considerar los llamados "cuadros". Se trata de identificar en el campo conceptual matemático en cuestión, las parcelas de las áreas de conocimiento que intervienen. En el caso que estamos desarrollando, los cuadros asociados son:



- *El cuadro algebraico*, relativo al concepto y propiedades de los polinomios en una variable, propiedades de las raíces reales y complejas, resolución de ecuaciones de segundo grado en una variable, propiedades de las funciones polinómicas.

Nuestro estudio versa también sobre polinomios de más de una variable, ecuaciones implícitas, búsqueda de valores de anulación en esos polinomios, completar cuadrados en binomios.

- *El cuadro numérico*, que es el ambiente en que se mueve el alumno cuando se sustituyen letras por números y la recopilación y tratamiento de la información numérica con recursos computacionales cuando sea propicio.

- *El cuadro geométrico*, que en el estudio versa sobre cónicas en el plano, superficies y sus propiedades geométricas, intersecciones con rectas en el espacio.

- *El cuadro analítico geométrico*, en el que se trabaja permanentemente con la vinculación entre el lugar geométrico de un conjunto de puntos y la ecuación que lo representa en un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales. Se enfoca la geometría analítica como una traducción al lenguaje y formulación del Álgebra del problema geométrico.

- *El cuadro relativo al Cálculo Diferencial*, donde se integran las nociones de función en una y dos variables y en el que se utiliza el concepto de límite para la definición de asíntotas.

## 5. LOS TIPOS DE SITUACIONES

Para dar respuesta a este interrogante se trata de diseñar situaciones de aprendizaje destinadas a asegurar de manera controlada la emergencia de conceptos matemáticos en el contexto de aprendizaje.

Una "situación didáctica" es un conjunto de relaciones explícita y/o implícitamente establecidas entre un alumno o un grupo de alumnos, algún entorno (incluyendo instrumentos o materiales) y el profesor, con el fin de permitir a los alumnos aprender, es decir reconstruir, algún conocimiento. Las situaciones son específicas del mismo. Para que el alumno "construya" el conocimiento, es necesario que se interese personalmente por la resolución del problema planteado en la situación didáctica. En este caso se dice que se ha conseguido la "devolución" de la situación al alumno.

El proceso de resolución del problema planteado se compara a un juego de estrategia o a un proceso de toma de decisiones. Existen diferentes estrategias, pero sólo algunas de ellas conducen a la solución del problema y a la construcción por el alumno del conocimiento necesario para hallar dicha solución. Este conocimiento es lo que se puede ganar, lo que está en juego en la situación. De este modo, la teoría de situaciones es una teoría de aprendizaje constructivo en la que el aprendizaje se produce mediante la resolución de problemas.

Si se interpreta en términos de juego, puede decirse que en la situación didáctica juegan al menos dos jugadores: el alumno y el profesor.

Se llama "situación adidáctica" a la situación matemática específica del conocimiento concreto que por sí misma, sin apelar a razones didácticas y en ausencia de toda indicación intencional, permite o provoca un cambio de estrategia en el jugador (el alumno).

La utilización por parte del profesor de situaciones adidácticas con una intención didáctica es necesaria porque el medio natural en el que vivimos es "no didáctico".

Para que un alumno aprenda un conocimiento matemático concreto es necesario que haga funcionar dicho conocimiento en sus relaciones con cierto medio adidáctico.





La noción de "medio" es esencial en la teoría de Brousseau (es decir, todos aquellos objetos con que los alumnos tienen una familiaridad matemática así como los diferentes dispositivos de estudio).

En las unidades que vamos a presentar, la herramienta computacional forma parte de "el medio".

La situación didáctica comprende una serie de intervenciones del profesor sobre la dupla alumno - medio destinadas a hacer funcionar la situaciones adidácticas y los aprendizajes que ellas provocan.

Uno de los avances más importantes de la teoría de las situaciones didácticas es que éstas pueden estudiarse en relación con las diversas formas de los conocimientos matemáticos y los correspondientes modos de los mismos.

Brousseau las categoriza en:

- *Situaciones adidácticas de investigación o de acción* (individual o en grupo), donde el alumno actúa, anticipa, formula hipótesis, las prueba;
- *Situaciones adidácticas de formulación*, confrontación de problemas, puesta a prueba (eventualmente un regreso al trabajo individual con restricciones diferentes). Destaca aquí el papel de las variables didácticas —elementos que el profesor puede manejar y que tienen incidencia en los procedimientos que los alumnos ponen en marcha— para que cada uno ponga a prueba sus propuestas y las de los otros; las pruebe, se las apropie.
- *Situaciones adidácticas de validación*, que requieren de los alumnos la explicitación de pruebas y por lo tanto explicaciones de las teorías relacionadas y los medios que subyacen en los procesos de demostración.
- *Situaciones didácticas de institucionalización*, donde el nuevo conocimiento es enfocado por primera vez como instrumento explícito que permite la resolución del problema.

## 6. LAS HERRAMIENTAS - EL ROL DE LA HERRAMIENTA COMPUTACIONAL

La posibilidad de una representación gráfica por computadora plantea nuevos interrogantes:

¿Hasta qué punto la ventaja de inmediata visualización facilita la comprensión sobre la generación de una curva o una superficie o sobre la relación que guarda con la ecuación que la representa algebraicamente?

Conocida la posibilidad de rotación o traslación o de variación del dominio, ¿cómo la utiliza el alumno? ¿trata de optimizar la visualización? ¿juega con secciones con distintos planos? ¿explora? ¿induce propiedades? ¿trata de demostrarlas? ¿o debe proponérselo el docente? (Por ejemplo las relativas a las secciones de un hiperboloide de una hoja al alejarse el plano de sección de un eje de simetría).

¿El alumno inventa superficies? ¿las analiza? ¿el ambiente computacional estimula la investigación del alumno? ¿lo interesa? ¿hace significativo el aprendizaje del tema? ¿o sólo actúa como un observador pasivo?

En cuanto a la socialización en la relación alumno-docente-compañero en el uso de la computadora: la distribución de dos alumnos por computadora respecto a uno solo por máquina ¿hace más lento el aprendizaje o lo agiliza en cuanto a una rápida sucesión de mutuas iniciativas por uno u otro? ¿cómo organiza el docente cada clase? ¿es posible

hacerlo? ¿qué actividades diseña y propone? ¿qué tiempo deja para el libre juego de la relación dialógica entre el estudiante que explora y la computadora que responde?.

¿Las solicitudes de los distintos pares de alumnos trabajando, respecto a problemas de uso del Software, o relativos a la comprensión del tema, o la aprobación o corrección de lo que se obtiene en pantalla, pueden ser atendidas en una división (30 alumnos) por un solo docente?

Existen voces que se alzan contra una mecanización de la resolución de problemas por computadora.

## 6-1. LA SELECCIÓN DE LAS HERRAMIENTAS CONCEPTUALES

La conceptualización de una cónica como lugar geométrico definido por una condición referida a elementos geométricos dados y la relación entre éstos y los coeficientes de la ecuación canónica que se obtiene es particularmente rica tanto desde el punto de vista geométrico como analítico - geométrico. Más aún cuando se estudia la ecuación de segundo grado.

La posibilidad de generalizar al espacio las formas de las cónicas: circunferencias a esferas, parábolas a paraboloides, elipses a elipsoides, hipérbolas a hiperboloides o generar a partir de curvas planas, rectas y cónicas otras superficies como ser las cilíndricas, superficies cónicas o de revolución, implica un fluido manejo conceptual de Geometría, Álgebra y Geometría Analítica que se supone como competencia previa o adquirida en el escalón que antecede al estudio del tema.

Las herramientas conceptuales que entran en juego son especialmente referidas a la relación entre una ecuación en una o dos variables, dada explícita o implícitamente o en forma paramétrica y el conjunto de puntos cuyas coordenadas son la solución de la ecuación dada en el respectivo sistema de referencia.

Interesa que se considere especialmente el concepto de equivalencia de ecuaciones en lo algebraico.

También interesa el concepto de "relación" que se debe manejar cuando una ecuación de segundo grado que está dada en forma implícita define dos funciones.

Se debe tener el concepto de cambio en los valores de las coordenadas de un punto cuando se trasladan, rotan o rototrasladan los ejes coordenados, tanto en el plano como en el espacio.

## 6-2. LA SELECCIÓN DE LAS HERRAMIENTAS INFORMÁTICAS

La herramienta utilizada fue MAPLE V (R5). Este es un proyecto del Symbolic Computation Group de la Universidad de Waterloo (Ontario, Canadá), con soporte del National Sciences and Engineering Research Council of Canada.

No obstante, el diseño didáctico de esta unidad podría haberse realizado con otros tipos de software como MATHEMATICA, DERIVE, MATLAB o cualquier otro que permita la representación gráfica en el plano y en el espacio de un conjunto de puntos dados por ecuaciones, siendo la elección el resultado de un estudio sobre las restricciones y potencialidad de cada sistema (algunos favorecen la representación de ecuaciones dadas en forma implícita, otros tienen la facilidad de la representación de una superficie dada paramétricamente). Lo que no se puede ignorar es que existen y son utilizados y utilizables en el trabajo de exploración Matemática.



## **7. LAS SELECCIONES LOCALES** (Propias del problema matemático concreto que se trata).

¿Qué objetivo se tiene para la selección de los problemas?

El objetivo es coordinar temas que se abordan y tratan en forma separadas pero que desde el punto de vista matemático sostienen relaciones de significado (Douady, 1995). Se busca una secuencia de problemas que constituya una progresión hacia una nueva noción.

## **8. EL DESARROLLO DE LA EXPERIENCIA - MODALIDAD DE TRABAJO**

En respuesta a las evidentes insuficiencias de la clase de teoría y clase de problemas de la estructura clásica del sistema universitario, Chevallard propone el "taller de prácticas de matemáticas" creado por algunas universidades. Esta concepción es la que ha prevalecido en el diseño de las unidades de enseñanza que se analizan.

El trabajo en el laboratorio que se implementó debería ser inscripto como una clase práctica, en el sentido de que en la clase práctica el profesor proporciona a los alumnos un corpus de problemas que aparentemente son parecidos entre sí.

El contrato didáctico en la clase de práctica hace que sea de carácter "público" un aspecto del estudio que en la clase de problemas tenía carácter "privado". El estudiante tiene la responsabilidad de rutinizar ciertas técnicas y resolver en presencia de sus compañeros y del profesor. En la clase de problemas tradicional el estudiante es responsable de interpretar las resoluciones propuestas por el profesor y resolver por su propia cuenta algunos problemas de cada tipo. (Chevallard, Bosch, Gascón)

Otra cláusula del "contrato" que se establece en la clase práctica exige que el estudiante se familiarice con ciertas técnicas hasta alcanzar un dominio tan robusto de las mismas tal que llegue a utilizarlas como algo "natural". A partir de aquí, estas técnicas podrán ser consideradas de manera oficial como técnicas "adquiridas" por los alumnos, pasando a formar parte del "medio matemático" de la clase. (Chevallard, Bosch, Gascón)

La metodología de la experiencia se basa en la participación activa del estudiante como agente de su aprendizaje, el que se procuró facilitar con el uso de programas informáticos.

Las pautas de trabajo son las siguientes:

- ♦ Los alumnos trabajan dos horas semanales en el laboratorio de computación (dos alumnos por máquina).
- ♦ En un comienzo se utiliza la computadora como una gran calculadora gráfica con funciones incorporadas de Geometría Analítica y Cálculo.
- ♦ Los alumnos no reciben nociones específicas sobre sistemas operativos ni programación, ya que existen sobre estos temas espacios y tiempos previstos en el curriculum. El uso de herramientas C A S requiere sólo saber entrar al programa respectivo y guardar la información.

El esquema metodológico está basado en la participación activa de los estudiantes usando el recurso de la discusión.

Las actividades se organizan con propuestas sucesivas emergentes de un problema inicial motivador utilizado por el docente como disparador de la situación didáctica. Siguiendo una inducción natural, motivada por las preguntas de los alumnos y ya conjeturadas por el docente, se deja un espacio de apertura a las preguntas imprevistas de los alumnos.

A continuación exponemos algunas especificaciones sobre el campo de investigación



- ❖ **MATERIA Y CURSO:** - Álgebra y Geometría I. Primer año del Ciclo Básico de las Carreras de Ingeniería. Primer Cuatrimestre. Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura, U.N.R.
  - Análisis Matemático I. Primer año de la Carrera de Licenciatura en Estadística. Facultad de Ciencias Económicas y Estadística, U.N.R.
- ❖ **TIEMPO:** una (1) observación semanal de 2 hs. de duración, durante cuatro (4) semanas.
- ❖ **TAMAÑO DE LA POBLACIÓN A OBSERVAR:**
  - En registro narrativo: 50 alumnos
  - En registro magnetofónico: 2 alumnos, en interacción con el docente y un computador
- ❖ **MODALIDAD:** observación
  - observación participante activa por parte del equipo de cátedra a cargo.
  - observación participante pasiva por parte de un miembro del grupo de investigación a cargo de la grabación del diálogo de dos alumnos frente al computador.
- ❖ **INSTRUMENTOS DE RECOLECCIÓN Y REGISTRO DE LA INFORMACIÓN:**
  - Notas de campo (descriptivas, textuales y aproximativas).
  - Registros anecdóticos.
  - Grabaciones magnetofónicas.
  - Grabaciones del trabajo realizado por los alumnos en diskette.
- ❖ **CRITERIOS ORIENTADORES DE OBSERVACIÓN:**

Se busca detectar situaciones adidácticas de "acción", "formulación" y "validación" que surgen de la observación general de la organización de la clase y de la relación de los alumnos con los contenidos y el medio.

#### *Situaciones adidácticas de acción*

Toda situación adidáctica de acción propone al alumno un problema en condiciones tales que la mejor solución se obtiene mediante el conocimiento a enseñar y de tal forma que el alumno puede actuar sobre la situación y hacer elecciones durante esta acción, al tiempo que la situación le devuelve la información sobre las consecuencias de su acción.

No se trata de una situación de manipulación libre o según un orden preestablecido: una buena situación de acción debe permitir al alumno juzgar el resultado de su acción y ajustar esta acción, sin la intervención del profesor, gracias a la retroacción por parte del medio de la situación. Las informaciones que le devuelve la situación son percibidas por el alumno como sanciones o refuerzos de su acción.

En una situación de acción se produce un "diálogo" entre el alumno y la situación. Esta dialéctica de la acción le permite mejorar el modelo implícito, es decir, tener reacciones que no puede todavía formular, probar, ni mucho menos, organizar en

una teoría. En todo caso la situación adidáctica provoca un aprendizaje por adaptación de acuerdo con la teoría de Piaget. (Chevallard, Bosch, Gascón, 1997)

#### *Situaciones adidácticas de formulación*

Para que el alumno pueda explicitar su modelo implícito y para que esta formulación tenga sentido para él, es necesario que pueda utilizar dicha formulación para obtener él mismo o hacer obtener a alguien un resultado. En una situación adidáctica de formulación el alumno intercambia información con una o varias personas. Comunica lo que ha encontrado a un interlocutor o a un grupo de alumnos que le devuelve la información. Los dos interlocutores, emisor y receptor, intercambian mensajes escritos u orales que son redactados en lenguaje matemático según las posibilidades de cada emisor. El resultado de esta dialéctica permite crear un modelo explícito que puede ser formulado con la ayuda de signos y de reglas conocidos o nuevos. (Chevallard, Bosch, Gascón, 1997)

#### *Situaciones adidácticas de validación*

La valoración empírica obtenida en las fases precedentes es insuficiente. En la dialéctica de la validación el alumno debe demostrar por qué el modelo que ha creado es válido. Pero para que el alumno construya una demostración y ésta tenga sentido para él, es necesario que la construya en una situación, llamada de validación, en la que debe convencer a alguna otra persona. Una situación adidáctica de validación es la ocasión para un alumno (proponente) de someter el mensaje matemático (modelo explícito de la situación) como una aseveración a un interlocutor (oponente). El proponente debe probar la exactitud y la pertinencia de su modelo y proporcionar, si es posible, una validación semántica y una validación sintáctica. El oponente puede pedir explicaciones suplementarias, rechazar las que no comprende o aquellas con las que no está de acuerdo (justificando su desacuerdo).

Como puede observarse una dialéctica de la validación puede incluir diversas dialécticas particulares de la acción, o de la formulación (por ejemplo, para establecer una terminología). Está claro además, que una dialéctica de la validación es en sí misma una dialéctica de la formulación y, en consecuencia una dialéctica de acción. (Chevallard, Bosch, Gascón, 1997).

## **9. CONCLUSIONES**

Con respecto al modo de apropiación de los contenidos por parte de los alumnos, es posible distinguir, a los fines del análisis, tres momentos estrechamente vinculados entre sí:

*Primer momento:* la curiosidad que suscita el uso de la PC, el impacto visual que provocan las imágenes del programa actúan, en principio, como fuente de motivación para los alumnos, quienes comienzan, mediante la manipulación y exploración de las funciones del ordenador, a familiarizarse tanto con los contenidos procedimentales necesarios para el correcto uso del MAPLE, como con los contenidos procedimentales y conceptuales de la materia.

En este momento predominan las situaciones adidácticas de acción, donde los alumnos interactúan con la computadora y, mediante un modelo teórico implícito traducido en el uso de nociones protomatemáticas, proceden a la resolución del problema.

*Segundo momento:* tiene lugar a partir del diálogo, la discusión y el intercambio de información entre ambos alumnos, con intervenciones ocasionales de las docentes y de

compañeros de otros grupos. Predominan las situaciones adidácticas de formulación, en donde la resolución del problema está expresada a través de nociones paramatemáticas que dan cuenta del grado de apropiación de los contenidos conceptuales por parte de cada alumno. Aquí tienen lugar los primeros intentos por explicitar y analizar el uso de las estrategias que emplean mientras buscan la solución, así como también comienzan a interpretar, identificar y definir lo que observan en la pantalla, es decir, las respuestas que les devuelve la computadora.

*Tercer momento:* pueden distinguirse situaciones adidácticas de validación a medida que transcurren las clases de Laboratorio y los alumnos, en base a la institucionalización hecha por las docentes (esto incluye a las denominadas clases "teóricas"), utilizan nociones matemáticas no sólo para demostrar y definir los conceptos sino que, a nivel procedimental, les permite realizar hipótesis acerca de los resultados posibles y, en consecuencia, obtener la estrategia "óptima" de resolución.

La aparición de un nuevo conocimiento, o de alguna respuesta "inesperada" por parte de la PC, provoca un conflicto cognitivo en los alumnos, conflicto que no puede ser resuelto mediante estrategias del tipo "ensayo-error" debido a la función conceptualizadora del diálogo, que obliga a los alumnos a analizar y reflexionar sobre sus acciones, para poder argumentar con racionalidad la pertinencia de sus decisiones en la solución dada al problema.

Otro rasgo a destacar en el proceso de aprendizaje es que la modalidad de trabajo adoptada (donde el énfasis está puesto en la exploración, la experimentación, la investigación, antes que en la "respuesta correcta") permite a los alumnos utilizar el error no ya como sinónimo de "fracaso" sino como otro punto de partida para nuevas problematizaciones y reflexiones, donde las posibilidades y consecuencias muchas veces son desconocidas hasta para las propias docentes.

Si centramos nuestra mirada en el rol docente, éste aparece como fundamental en el proceso de apropiación de los conocimientos por parte de los alumnos. De los datos obtenidos podemos deducir que la intervención de las docentes tiende principalmente a la provocación del conflicto cognitivo en los alumnos, mediante la problematización de los contenidos presentados. Para ello, se basan en el uso del interrogatorio didáctico, la pregunta y repregunta, el cuestionamiento de las estrategias de los alumnos, la contradicción y la duda, con el fin de lograr el análisis y la reflexión por parte de los mismos. Resulta interesante observar la alternancia de situaciones didácticas en las que las docentes conceptualizan lo trabajado por los alumnos (instancia de institucionalización) con el desarrollo de situaciones adidácticas; en donde se evidencia la tensión producida por la demanda de los alumnos para obtener respuestas puntuales y la no - intervención deliberada de las profesoras.

Es en esta línea de acción que pueden puntualizarse ciertas escogencias didácticas, tales como: encuadre de la tarea, aclaración de las consignas dadas, anticipación de contenidos y actividades. Dichas intervenciones obran a manera de guía o "andamiaje" (Bruner) en la orientación y comprensión del trabajo con la PC, como así también en la relación y reorganización de los nuevos conocimientos asimilados por los alumnos.

La disposición de los educandos en pequeños grupos facilita no sólo el diálogo entre integrantes de un mismo equipo, sino que además propicia un clima áulico distendido que favorece la realización de la tarea. La restricción que presenta esta modalidad didáctica, de acuerdo a lo analizado, radica en la dificultad que enfrentaron las profesoras en la atención simultánea de múltiples grupos con necesidades y ritmos de aprendizaje diferentes,



situación que en varias ocasiones limitó (debido a cuestiones físicas y horarias) la posibilidad de intervención docente al mínimo.

En lo que hace, específicamente, a la interacción de los alumnos con la computadora, puede evidenciarse la importancia de los contenidos procedimentales relacionados con el manejo y la comprensión del programa, en tanto se manifiestan como la base para la apropiación de los contenidos conceptuales y parecen cumplir una función destacada en la asimilación y desarrollo de otras habilidades inherentes a la actividad matemática. En lo que hace a lo observado, merecen mencionarse: procedimientos de tipo conceptual (definir, demostrar, identificar, comparar); procedimientos traductores (interpretar); procedimientos operativos (calcular, graficar, aproximar, optimizar); y procedimientos heurísticos y metacognitivos (resolver).

Los alumnos incluyen, entre sus estrategias de resolución de problemas, diversos "juegos de cuadros" (Douady) al utilizar los recursos tanto gráficos como algebraicos y numéricos que presenta el programa MAPLE.

En este sentido, las posibilidades gráficas y visuales de dicho programa tienen una apreciable influencia en las formas de aprender de los educandos al cumplir diferentes funciones:

- función motivadora: mediante el impacto y la riqueza de las imágenes (color, volumen, animación, etc.);
- función problematizadora: al permitir la creación de nuevas figuras y relaciones espaciales, abriendo paso a numerosas experimentaciones e interrogantes;
- función facilitadora de un aprendizaje significativo: como vía de familiarización con los diversos objetos matemáticos, a través de la identificación, comparación, interpretación, aproximación y comprensión por analogía de sus representaciones.

Dentro de la investigación realizada, resulta necesario señalar que los alumnos no se limitan al uso de la PC como única herramienta presente en el medio, sino que utilizan otros dispositivos (podríamos decir "tradicionales") en la consecución de la tarea, tanto como para complementar las estrategias de resolución brindadas por la máquina, como para verificar o corregir los datos e informaciones que la misma les suministra. Dichos alumnos, al valerse también de otros instrumentos (lápiz y papel, apuntes tomados en clase, textos de teoría) ponen en circulación sus saberes previos, integrándolos de esta manera a la totalidad de los conocimientos y habilidades adquiridos.

Puede verse en lo anteriormente escrito una estrecha relación con el rol asignado a la computadora, ya sea a nivel de los alumnos o de las docentes, en el sentido de que se tiende, de forma explícita, hacia un uso racional y crítico de la misma, reflexionando continuamente acerca de sus alcances y limitaciones, ventajas y desventajas; lo cual puede ser señalado en el progresivo "aprovechamiento" de esta herramienta durante el transcurso de los laboratorios.

En cuanto a los resultados del aprendizaje, si bien se trata de una experiencia con diseño no comparativo, puede notarse que en promedio de calificaciones el panorama se muestra alentador.

En el mismo tiempo de clase, los alumnos han incorporado el manejo de una herramienta computacional (no así las restantes nueve divisiones que constituyen la Cátedra) y aprobado una evaluación grupal realizada por medio de un trabajo práctico en laboratorio, además de la evaluación tradicional sin recursos computacionales.

## 10. ANEXO

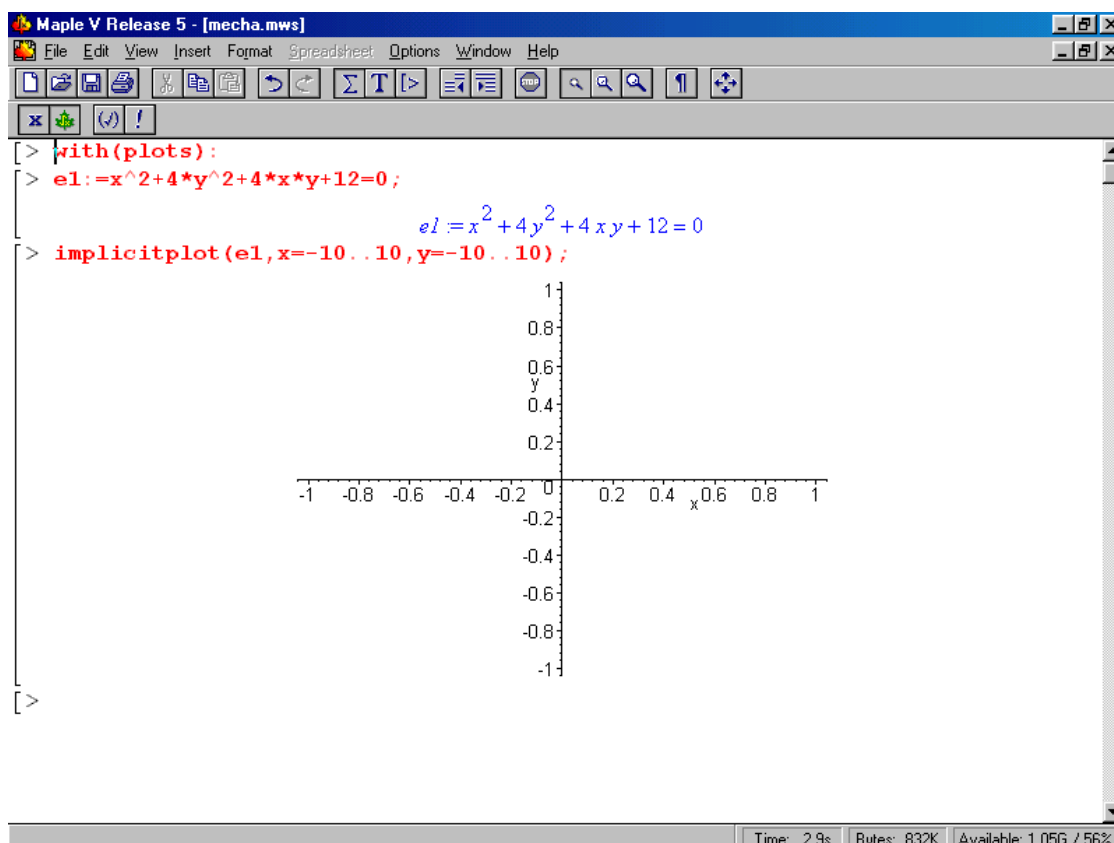
A continuación presentamos algunos registros seleccionados de un total de ocho horas de grabación que muestran las distintas situaciones que confrontan las conjeturas del profesor a "a priori" con las "devoluciones" que efectivamente tienen lugar. Esta muestra forma parte del trabajo de análisis en el que se realizó la Categorización total de acuerdo a la clasificación realizada por Brousseau.

- *REGISTRO MAGNETOFÓNICO Y PANTALLA COMPUTACIONAL DE UNA SITUACIÓN DIDÁCTICA CORRESPONDIENTE AL LABORATORIO N° 2: "EXPLORANDO FORMAS".*

### PROBLEMA PLANTEADO:

Se propone a los alumnos investigar la relación existente entre la ecuación  $x^2 + 4y^2 + 4xy + 12 = 0$  y su gráfica.

Los alumnos  $A_1$  y  $A_2$  ingresan los comandos correspondientes y obtienen la siguiente visualización:



$A_1$ : ¡No aparece nada! ¿Qué pasó?

$A_2$ : ¿Está todo bien escrito? Controlemos...

$A_1$ : Sí...Está bien...¿Y si cambiamos los rangos?

$A_2$ : Dale...Ponele -20..20. Probá también con -1..1 o -100..100...No sé.





*Una y otra vez se obtiene una gráfica vacía.*

A<sub>1</sub>: No pasa nada.

A<sub>2</sub>: ¿Esta ecuación no representa nada? Llamemos a la profesora.

*En este caso, la situación didáctica planteada es inductora de una **situación adidáctica de ACCIÓN** generada por la respuesta "inesperada" de la computadora.*

*Los alumnos aplican estrategias de tipo ensayo-error esperando otras respuestas, que nunca obtienen.*

*Se observa la apropiación paulatina que los alumnos hacen del problema a través de los intentos de explicar y/o cambiar la pantalla obtenida.*

*Algunas manifestaciones del conflicto cognitivo que provoca en los alumnos la devolución de la computadora son:*

- *la desconfianza en ellos mismos como operadores del software*
- *la reducción del problema a una variación de rangos*

*Finalmente, los alumnos acuden a la profesora. Se insinúa el espacio para la construcción de un nuevo conocimiento.*

- **REGISTRO MAGNETOFÓNICO Y PANTALLA COMPUTACIONAL DE UNA SITUACIÓN DIDÁCTICA CORRESPONDIENTE AL LABORATORIO N° 4: "LA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO".**

**PROBLEMA PLANTEADO:**

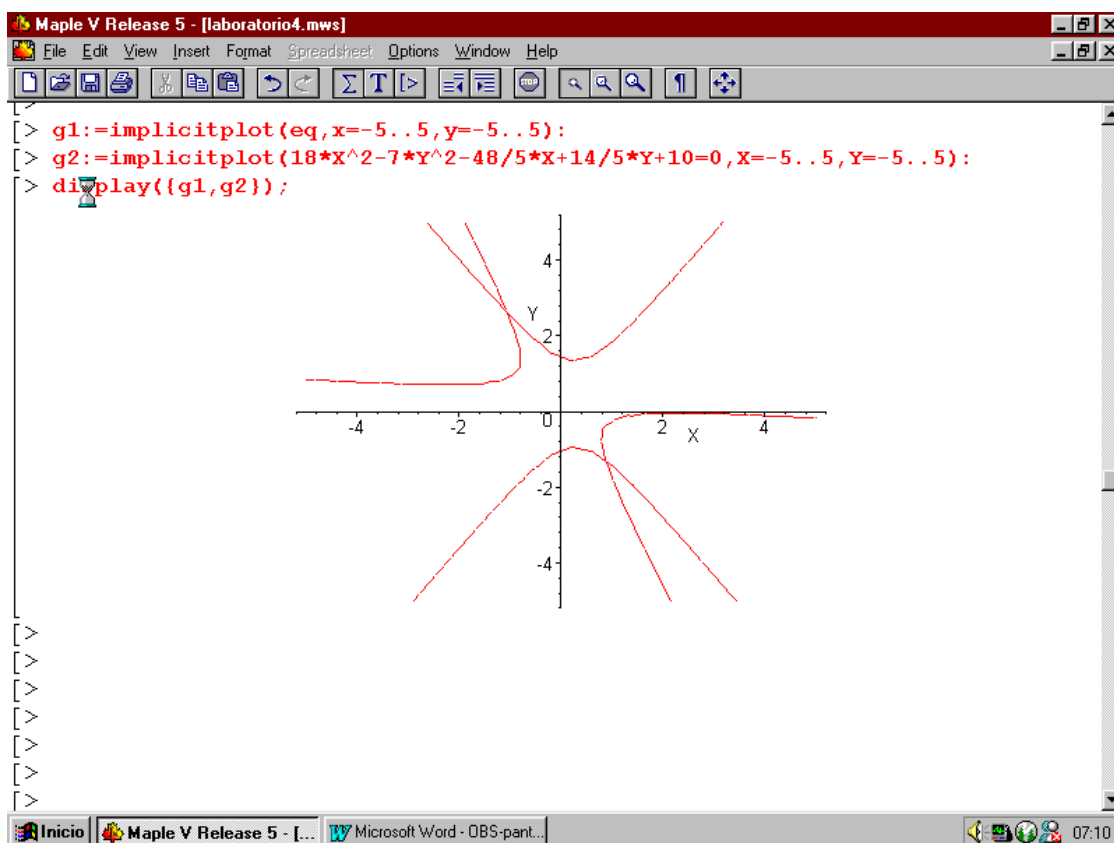
Se propone a los alumnos representar gráficamente en un mismo sistema de ejes coordenados las curvas correspondientes a:

- 1) Una ecuación de segundo grado con término rectangular

$$2x^2 + 24xy + 9y^2 - 8x - 6y + 10 = 0$$

- 2) La ecuación obtenida de la primera, cuando se le ha realizado una rotación apropiada en forma tal que se anule el término rectangular.

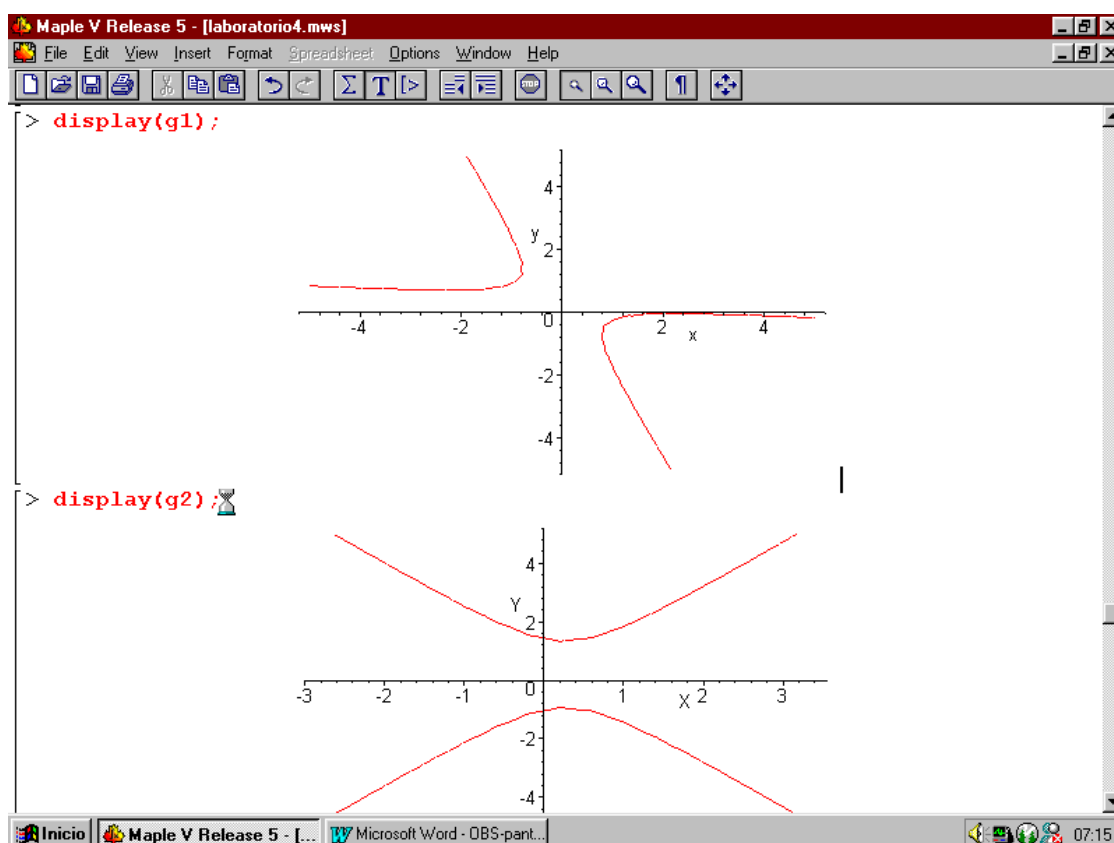
*Una vez que los alumnos tienen las competencias necesarias para realizar una rotación en un ángulo tal que a través de la misma se anule el término rectangular, pueden realizar una rotación con recursos algebraicos o aprovechar los comandos que facilitan las operaciones y obtener la gráfica de la curva original y la rotada. Obtienen la siguiente pantalla:*



A<sub>1</sub>: A ver ..., ¿ahí qué hizo?

A<sub>2</sub>: ¿Cuál es la rotada?

A<sub>1</sub>: Esta es la rotada, es la que armamos nosotros. Porque al hacer la rotación desapareció el término rectangular, y después de rotada queda así (*señala la pantalla*). Vamos a graficarlas por separado, dale.



A<sub>1</sub>: "g1" sería esta ecuación. (Señala la pantalla.), con el término rectangular.

Y "g2" sería la ecuación sin el término rectangular.

A<sub>2</sub>: ¿Por qué, si "g2" es la rotada, dibuja los ejes sin rotar?

A<sub>1</sub>: Supongo que es porque el programa hace lo que vos harías con lápiz y papel, te acordás?, sobre los ejes ya rotados vos dibujás fácil la ecuación canónica, sólo que acá a estos ejes te los muestra derechos. Además, fijate que coloca como nombres "X" e "Y" mayúsculas que corresponden a la ecuación ya rotada.

A<sub>2</sub>: Es verdad. ¡Qué fácil!. Se hace super rápido la rotación con la compu, haciéndolo a mano tardamos un montón!

Predominan **situaciones adidácticas de FORMULACIÓN** en las que a partir de las hipótesis que formulan y ponen a prueba, se produce el apropiamiento del nuevo conocimiento por parte del alumno. Realizan vinculaciones entre los cuadros algebraico y geométrico pues se observa que relacionan cada ecuación con su correspondiente gráfica. Cabe destacar la valoración que expresan acerca de las ventajas de la utilización de la herramienta computacional en la resolución de este problema en particular.

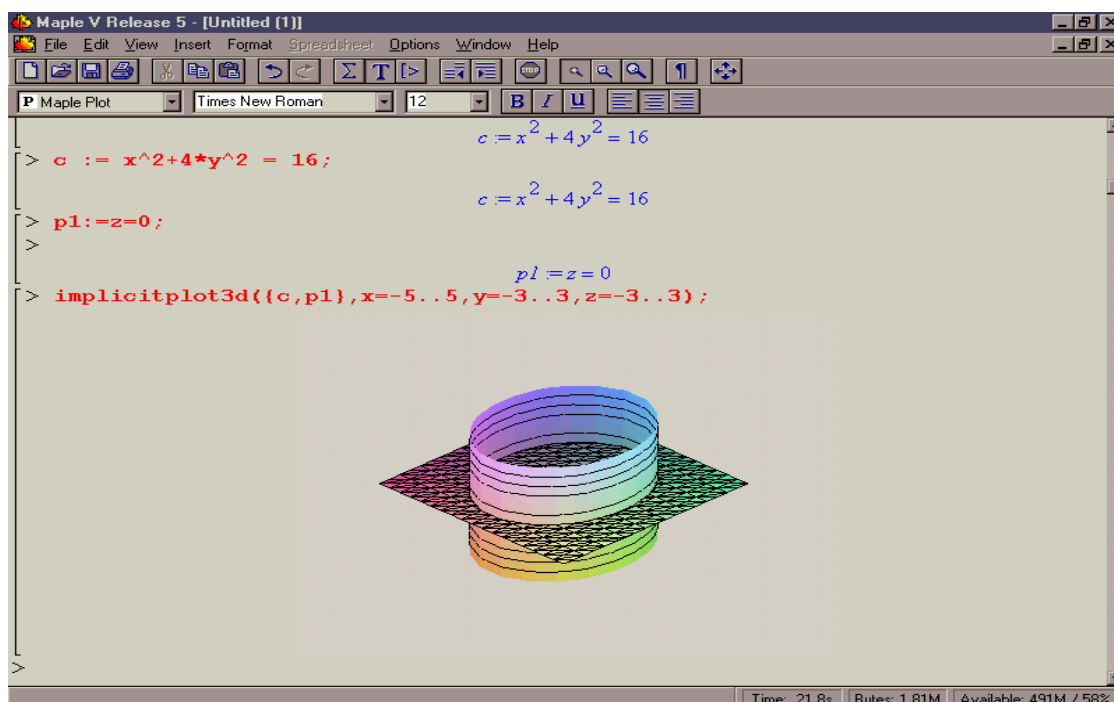
- **REGISTRO MAGNETOFÓNICO Y PANTALLA COMPUTACIONAL DE UNA SITUACIÓN DIDÁCTICA CORRESPONDIENTE AL LABORATORIO N° 5: "SUPERFICIES".**

**PROBLEMA PLANTEADO:**

Se propone a los alumnos estudiar la intersección del cilindro de ejes paralelos al eje Z:

$$x^2 + 4y^2 = 16 \text{ con distintos planos.}$$

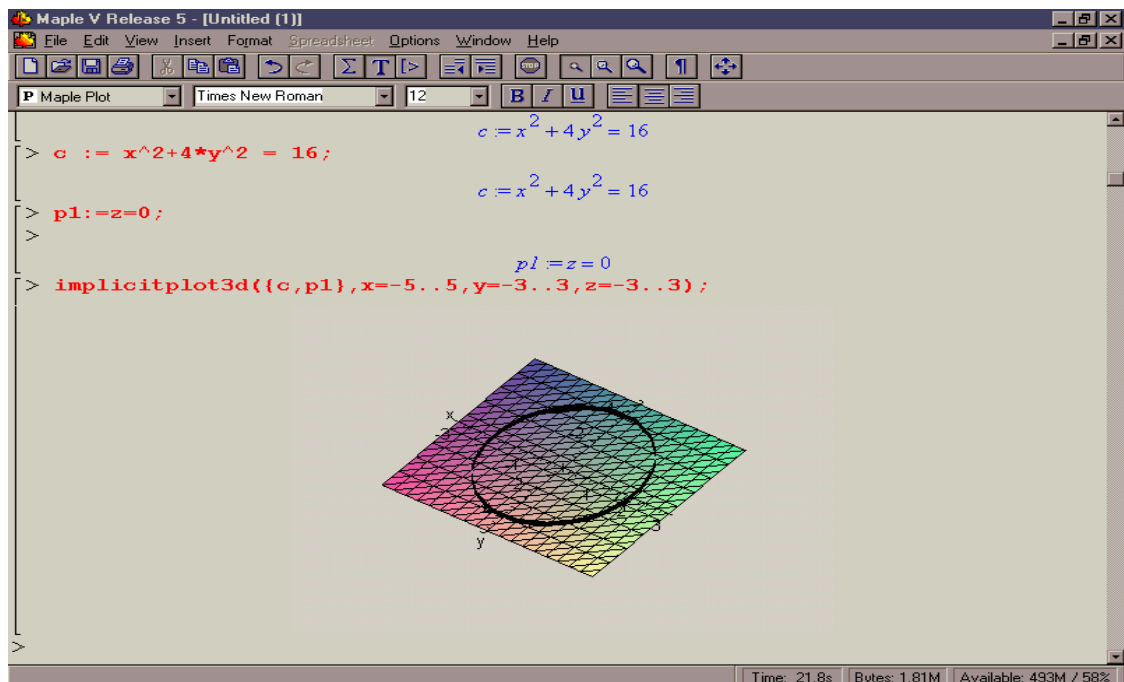
Los alumnos ingresan los comandos necesarios y obtienen la siguiente gráfica:



A<sub>1</sub>: ¿Qué lindo se ve?

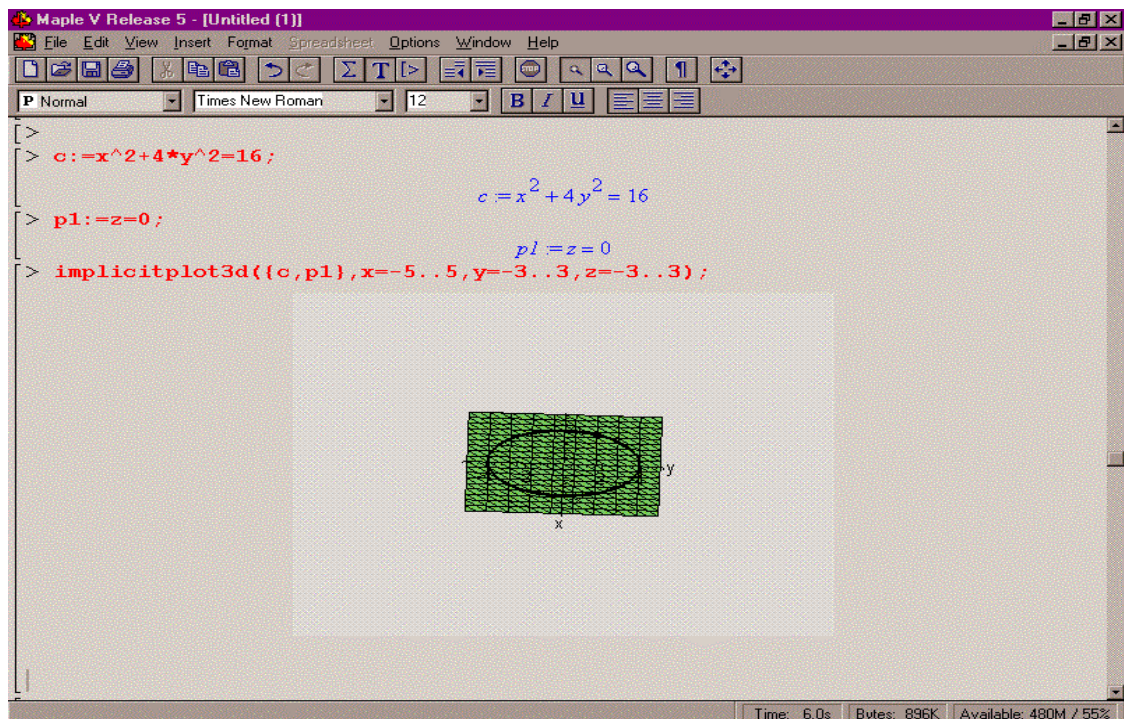
A<sub>2</sub>: Fijate que cuando se cortan forman una elipse. ¿Elipse o circunferencia?:

A<sub>1</sub>: A ver, rotá la figura, para mirarla desde arriba.



A<sub>2</sub>: ¿Pero es una elipse o una circunferencia?.

A<sub>1</sub>: A ver ponele 1:1.



A<sub>1</sub>: Ves que es una elipse.

A<sub>2</sub>: ¿Por qué?

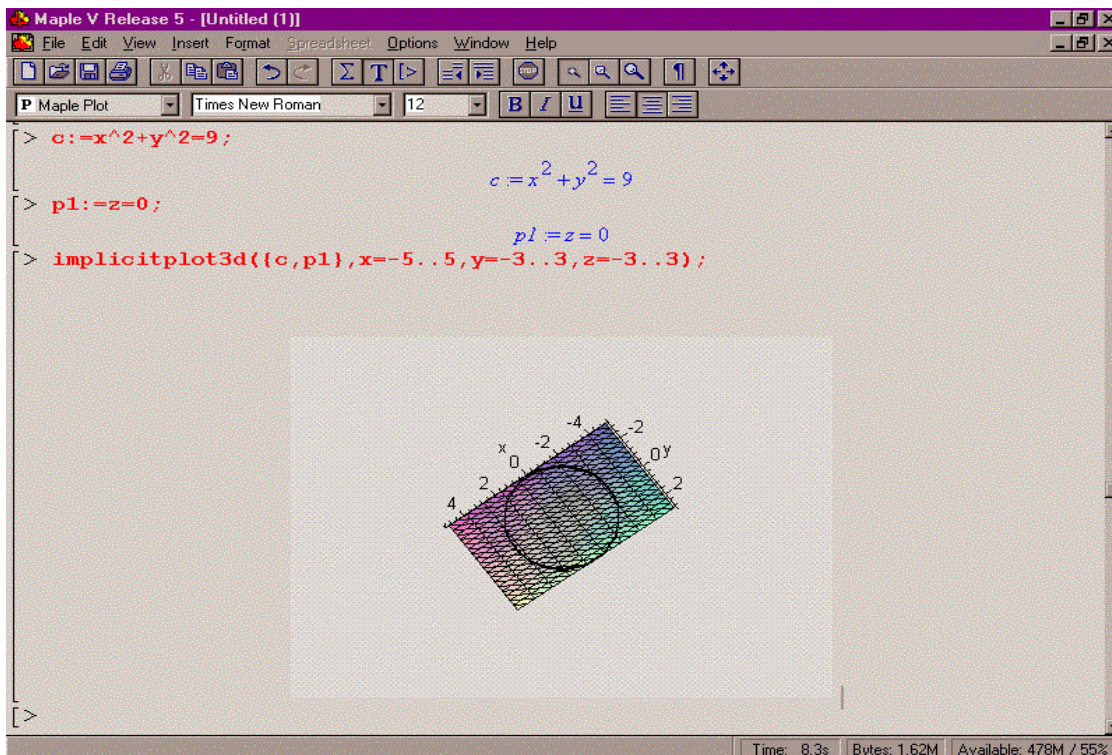


A<sub>1</sub>: Fijate que en el plano la ecuación  $x^2 + 4y^2 = 1$  es un elipse.

A<sub>2</sub>: ¿Y cómo sería la ecuación del cilindro para que el corte dé una circunferencia?.

A<sub>1</sub>: Ponele coeficientes iguales a  $x^2$  y a  $y^2$ , por ejemplo:  $x^2 + y^2 = 9$ .

Vuelven a ingresar los comandos y obtienen la siguiente gráfica:



El impacto visual provocado por la imagen que aparece en la pantalla despierta en los alumnos la curiosidad en induce a **situaciones adidácticas de ACCIÓN**, dirigidas a la indagación creativa de nuevas situaciones.

De este modo se concretan **situaciones adidácticas de FORMULACIÓN Y VALIDACIÓN**, en donde se ponen en juego los conocimientos previos de cónicas para investigar distintas intersecciones sobrepasando los límites de la cuestión planteada.

Se observa aquí como la computadora favorece el enriquecimiento de la metodología de trabajo, en cuanto a la estructuración y análisis de contenidos, e incluso a la formación de conceptos, puesto que al finalizar el juego interactivo descrito, los alumnos se encuentran en óptimas condiciones para comenzar la etapa de institucionalización teórica.

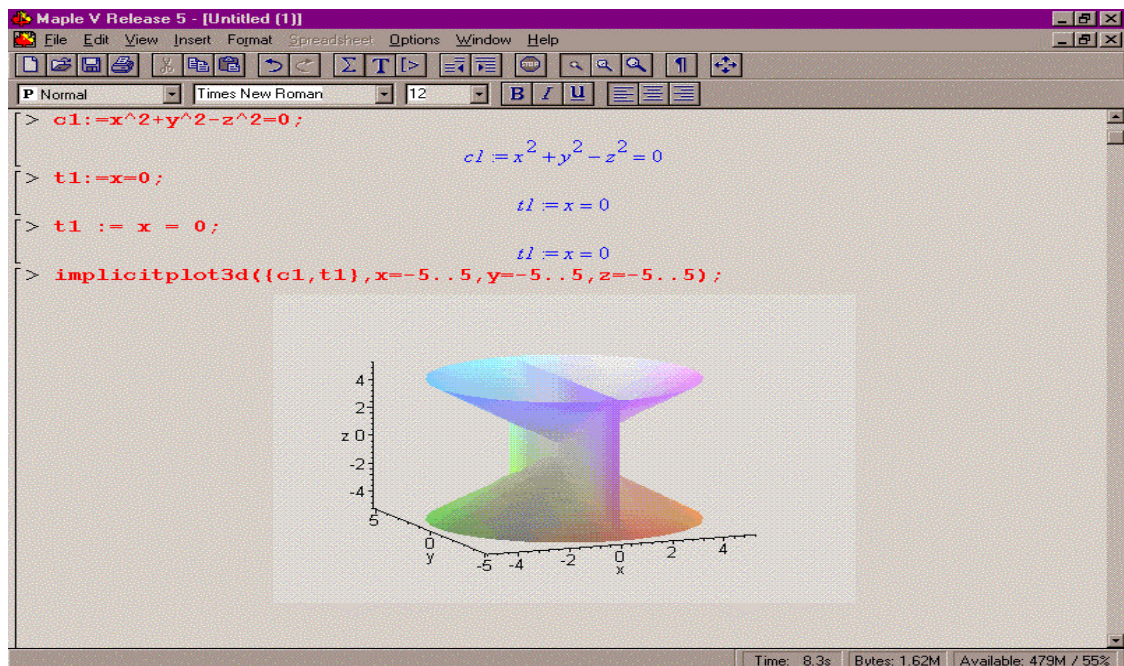


➤ OTRA SITUACIÓN DIDÁCTICA EN EL MISMO LABORATORIO:

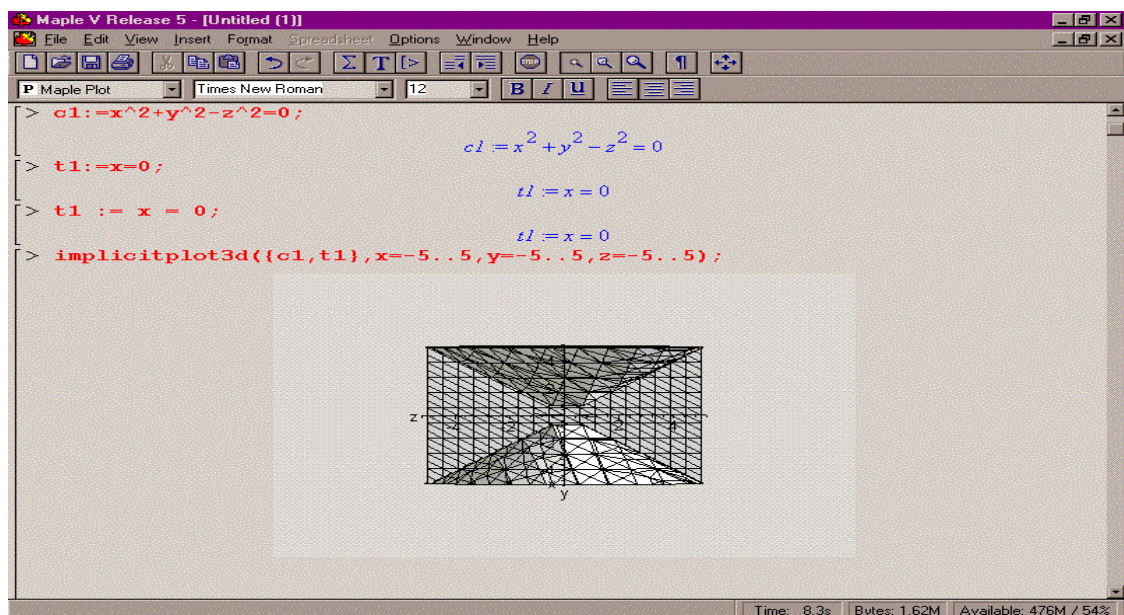
PROBLEMA PLANTEADO:

Se propone a los alumnos estudiar la intersección de la superficie cónica  $x^2 + y^2 - z^2 = 0$  con un plano coordenado y con distintos planos paralelo al mismo.

Los alumnos ingresan los comandos necesarios y obtienen la siguiente gráfica:



A<sub>1</sub>: No se ve bien... Mové la gráfica.

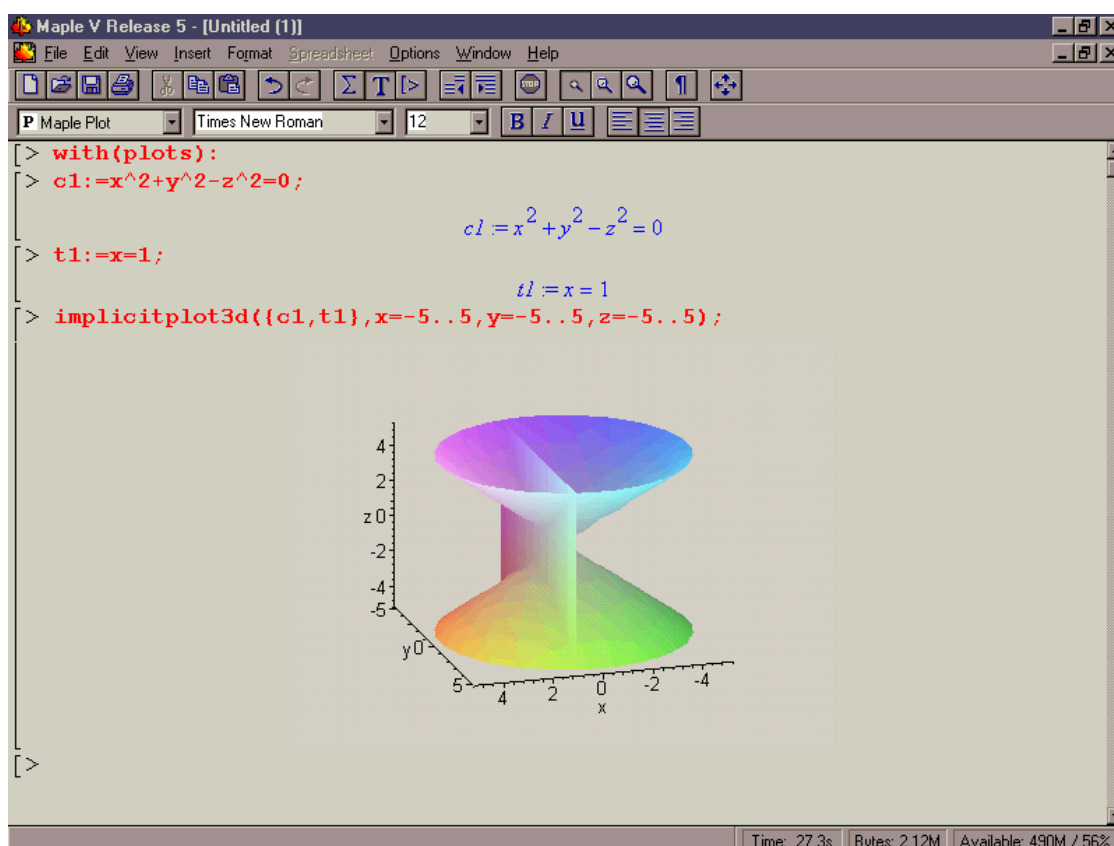


A<sub>2</sub>: Fijate que dan dos rectas: esta y esta. (Señala la gráfica en la pantalla).

A<sub>2</sub>: Ahora tenemos que hacer lo mismo que antes pero con un plano paralelo.

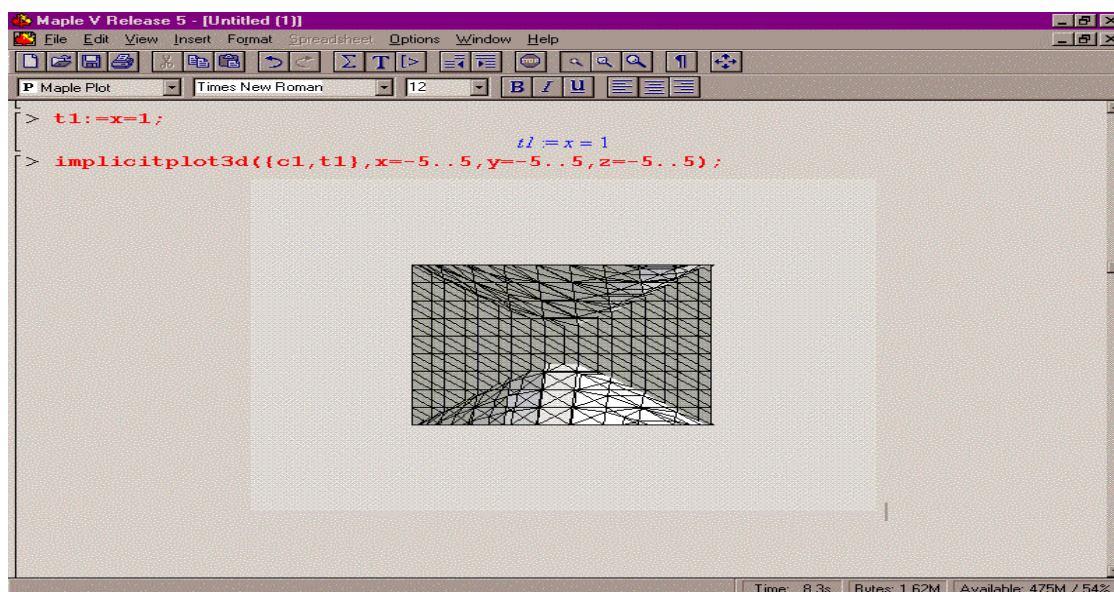
A<sub>1</sub>: Mandale x=1.





A<sub>1</sub>: La intersección del cono con t1, ¿da de nuevo dos rectas?.

LOS ALUMNOS VARÍAN LAS VISTAS Y OBTIENEN:

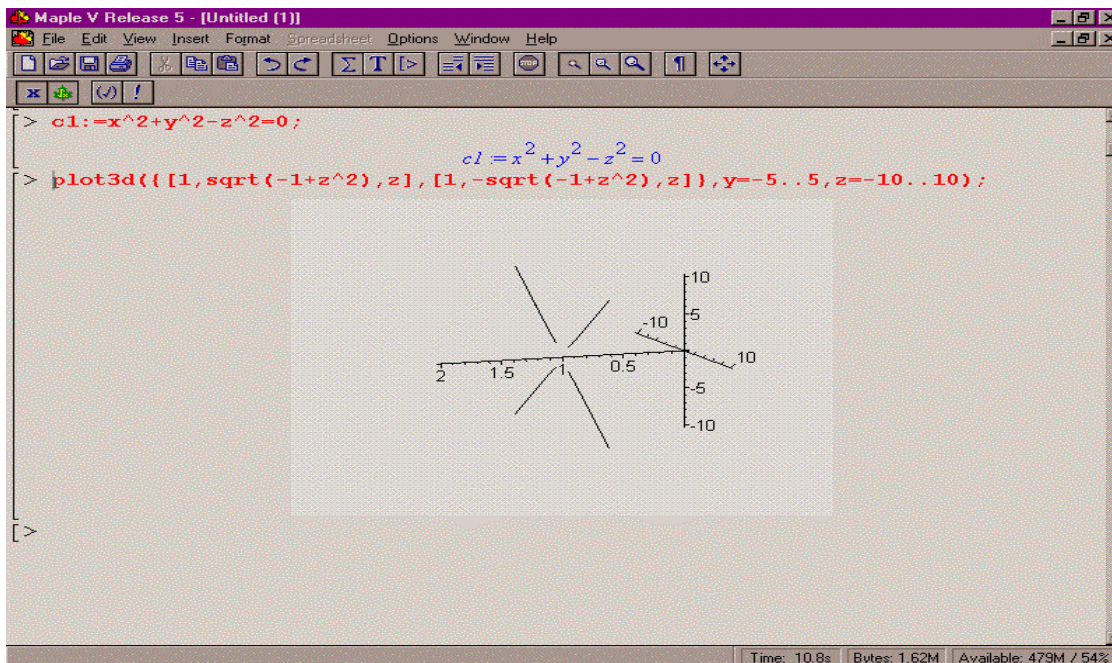


A<sub>1</sub>: ME PARECE QUE AHORA SE VE UNA HIPÉRBOLA. ¿PUEDE SER?.

A<sub>2</sub>: No sé, usemos el intercept para ver qué curva da.



UTILIZAN EL RESULTADO QUE LES BRINDA LA COMPUTADORA Y OBTIENEN LA SIGUIENTE REPRESENTACIÓN GRÁFICA.



A<sub>1</sub>: ¡Guau! ¡Perfecta!

A<sub>2</sub>: ¿Son dos líneas rectas o es una hipérbola?.

En lo sucesivo los alumnos modifican aspectos de la gráfica, esperando poder tomar una decisión.

Aquí puede observarse cómo la computadora desempeña un **rol problematizador** en el alumno al devolver visualizaciones "no esperadas". También se hace evidente que asiste pero no sustituye el razonamiento. El alumno debe confiar más en él mismo que en la computadora para no incurrir en errores y pensar que todo pasa por la máquina. Se presenta un **situación adidáctica de FORMULACIÓN**, dado que intercambian información en una dialéctica que busca explicitar una propiedad.

## 11. BIBLIOGRAFÍA

- ANIDO DE LÓPEZ M.; BORTOLATO, G. (1987): "Matemática e ingeniería: Bases para un diseño curricular con proyección al postgrado". Publicación U. N. R., Rosario.
- ANIDO DE LÓPEZ, M.; VILLALONGA, M. (1984) "La Computación Gráfica en la Didáctica de la Matemática – Una forma de percibir la belleza de una ciencia", *Actas ICME 5*, Melbourne, Australia.
- ANIDO DE LÓPEZ MERCEDES. (1998): "Un proyecto sobre el uso de herramientas C.A.S. en el aprendizaje de la matemática básica". *Revista de la Facultad de Ciencias Económicas y Estadística de la Universidad Nacional de Rosario*. Rosario, 20-22.



- ANIDO DE LÓPEZ MERCEDES; CO PATRICIA; GUZMAN MARTHA (1999): "La Enseñanza de la Geometría en el Nivel Universitario con Herramienta Maple". *Revista IRICE del Instituto Rosario de Investigaciones en Ciencias de la Educación. CONICET – UNR*. N° 13, 155 - 169. Rosario, Argentina
- ANIDO DE LÓPEZ; M. Y RUBIO SCOLA, H. (1999): "Un Ejemplo de Aprendizaje en el Sentido de Polya". *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* vol. 3. México D.F.
- ARTIGUE, M. (1989): "Épistémologie et Didactique, Cahiers de DIDIREM N° 3". Université de Paris Vil, juin.
- ARTIGUE, M. (1990): "Ingénierie Didactique", en *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 9.3, Grenoble, La Pensée Sauvage, 281-307.
- ARTIGUE, M. (1995): "El Lugar de la Didáctica en la Formación de Profesores" Grupo Editorial Iberoamericano. 7-23.
- ARTIGUE, M.; DOUDAY, R.; MORENO, I.; GÓMEZ, P. (1995): "Ingeniería Didáctica en Educación Matemática". Grupo Editorial Iberoamericano. 34-56.
- BROUSSEAU, G. (1987): "Fondements et méthodes de la didactique", en *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 7.2, Grenoble, La Pensée Sauvage, 34-116.
- BROUSSEAU, G. (1988): "Los diferentes roles del maestro". U.Q.A.M. Buenos Aires.
- BROUSSEAU, G. (1989): "Fundamentos de Didáctica de las Matemáticas". Universidad Zaragoza.
- BROUSSEAU, G. (1989): "Les obstacles épistémologiques et la Didactique des Mathématiques", *Constructions des savoirs. Obstacles et conflits*, Ottawa CIRADE-INC., 40-64.
- BROUSSEAU, G. (1976): "Les obstacles épistémologiques et les problèmes de Mathématiques", *Actes de la XXVIII éme Rencontre de la CIEAEM, Louvain La Neuve*, 5-12. 152-169.
- BROUSSEAU, GUY (1996): "La Didactique des Mathématiques en la formación del professorat". *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*. Vol. 11, núm. 1. 1-12.
- CHEVALLARD, J. (1988). "La Transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné". La Pensée Sauvage: Grenoble. Francia
- CHEVALLARD, YVES; BOSCH MARIANA; GASCÓN, JOSEP (1997): "Estudiar Matemática". Edit. ICE-Horsori. 213-225; 277-290.
- DOUDAY, REGINE (1995): "La Ingeniería Didáctica y la Evolución de su Relación con el Conocimiento". Grupo Editorial Iberoamericano.
- ENRIQUES, F.; AMALDI, V.; GUARDUCCI, A.; VITALI, G.; VAILATI, G. (1948): "Fundamentos de la Geometría". Ed. Iberoamericana. Argentina. 15-55.
- GUZMÁN, MIGUEL DE (1996): "Papel de la tecnología en la Educación Matemática". Ma - Tex. 1 Programa Escolar.
- GUZMÁN, MIGUEL DE (1996): "El Rincón de la Pizarra - Ensayos de visualización en Análisis Matemático". Ediciones Pirámide. Madrid.
- GUZMÁN, MIGUEL DE (1992): "Tendencias innovadoras en Educación Matemática". Red Olímpica.



- GUZMÁN, MIGUEL DE (1995): "El Papel del Matemático Frente a los Problemas de la educación Matemática". *Memorándum de la Unión Matemática Argentina*. Buenos Aires.
- GUZMÁN, MIGUEL DE (1997): "Tendencias Innovadoras en Educación Matemática". Buenos Aires. OMA
- JONASSEN, D.H. (1995): "Objetivismo versus Constructivismo: Do we need Philosophical paradigm Shift? " *Educational Technology.- Research and Development* 39 (3).
- JONASSEN, DAVID H. (1995): "Computers as Cognitive Tools: Learning with Technology. Not from Technology". *Journal of Computing in Higher Education* 6 (2). 40-73.
- VERGNAUD, GÉRARD (1976-1981): "Structures additives et complexité psychogénétique". *Revue française de Pédagogie*.
- VERGNAUD, GÉRARD (1980): "Problemática y Metodología de la Investigación en Didácticas de las Matemáticas". Segundo Seminario de Investigaciones Psicopedagógicas. Barcelona. 31-42.
- VERGNAUD, GÉRARD (1981): "Jean Piaget: Quels enseignement pour la Didactique". *Revue Française de Pédagogie*, N° 57. Paris.
- VERGNAUD, GÉRARD (1981): "L'enfant, la mathématique et la réalité". Berne. Peter Lang.
- VERGNAUD, GÉRARD (1983): "Didactique et acquisition de la notion de volume". En *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol 4.1., Grenoble. La Pensée Sauvage.
- VERGNAUD, GÉRARD (1991): "La théorie des champs conceptuels". En *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol 4.1., Grenoble. La Pensée Sauvage
- VERGNAUD, GÉRARD Y RICO, G.(1998): "Contribuciones a la psicopedagogía de las Matemáticas". IREM. Orleáns.
- VERGNAUD, GERARD (1980): "Problemática y metodología de la investigación en didáctica de la matemática". segundo seminario de investigaciones psicopedagógicas celebrado en barcelona, alrededor del tema "métodos de observación y análisis de los procesos educativos"
- VILLANI, VINICIO (1994): "L'insegnamento Preuniversitario della Geometria: Molte Domande, Qualche Risposta". *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*. Vol. 17A-17B N° 5, 439-458.
- VILLANI, VINICIO (1995): "Le trasformazioni Geometriche Nella Scuola Secondaria Superiore". *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*. Vol. 18A-18B N° 6, 669-688.